

COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 30 AOUT 1886.

PRÉSIDENCE DE M. ÉMILE BLANCHARD.

M. le **PRÉSIDENT** signale à l'Académie la présence de divers savants qui ont reçu la mission de s'associer, au nom de la science de leur pays, à l'hommage rendu à M. Chevreul, à l'occasion de son centenaire : M. *Van Beneden*, représentant la Belgique; M. *Broch*, représentant la Norvège; M. *Bosscha*, représentant les Pays-Bas; M. *Govi*, représentant l'Italie.

M. le **PRÉSIDENT** prend ensuite la parole, et s'exprime comme il suit :

« MONSIEUR CHEVREUL,

» Aujourd'hui, le 30 août 1886, au nom de l'Académie, j'ai l'insigne honneur de vous souhaiter votre fête : fête unique, celle de votre centenaire. Par une heureuse rencontre, notre séance tombe comme si l'heure avait été choisie. Dans la famille, c'est la veille du jour marqué qu'on souhaite une fête. Ne convenait-il pas qu'il en fût de même dans l'Académie, notre famille intellectuelle, que nous aimons d'autant plus que nous vieillissons davantage, gardant au cœur le gracieux souvenir de ceux qui, autrefois, nous prêtèrent assistance, le regret de pertes trop tôt subies, mais aussi la

satisfaction d'avoir vu arriver parmi nous de jeunes Confrères qui répondent de l'avenir.

» Il vous en souvient, cher Maître ; c'était dans la première séance du mois de septembre 1883, je rappelai que le doyen de l'Institut venait de commencer sa quatre-vingt-dix-huitième année, et je déclarai que c'était avec confiance que nous voyions approcher l'instant où la France et l'Académie célébreraient le centenaire de l'un des savants les plus illustres de notre siècle. On me pardonnera, si je ne résiste pas à l'envie de m'applaudir un peu d'avoir bien prédit, et de vous exprimer, Maître, ma gratitude pour avoir fait honneur à ma parole. C'est la bonne fortune qui me ramène à cette place qu'il y a trois ans j'occupais à titre légitime ; je la dois à notre cher Président qui a dû s'absenter. N'ayant point à le plaindre, je me console bien volontiers de son absence. En homme d'esprit et, je veux le dire, en homme rompu à la manœuvre, d'après la considération assez justifiée qu'à une époque de villégiature nos rangs seraient fort éclaircis, il est venu le premier vous apporter le tribut d'hommages de la Compagnie et vous offrir ses meilleurs compliments. Je suis donc au bonheur d'être en cette circonstance l'interprète de l'Académie, et tout à l'heure, Maître, de vous embrasser, vous, Monsieur Chevreul, qui restez le dernier témoin de ma carrière tout entière.

» On a parlé de Fontenelle qui a vécu un siècle ; il l'a manqué de quelque peu. A vous, rien ne devait manquer.

» Mon intention n'est pas de m'arrêter à vos travaux. Demain, un Confrère autorisé retracera, pour l'enseignement et pour le plaisir de ceux qui ne la connaissent pas d'une manière suffisante, votre vie scientifique qui longtemps sera citée en exemple. Pour ma part, je n'en relèverai qu'un seul trait.

» Pendant la méditation, vous m'êtes apparu, cher Maître, jeune, plein d'enthousiasme pour l'étude, animé du noble désir d'apporter dans la recherche une rigueur, une précision alors presque inconnues ; je vous ai suivi, dégageant, par d'ingénieux procédés de votre invention, d'une masse grasseuse informe, de précieuses matières d'une pureté parfaite. L'œuvre magistrale est accomplie : désormais est acquise la connaissance de toute une catégorie de corps ayant un rôle important ; le succès est complet. Bientôt, pourtant, une autre phase se dessine : de vos travaux naît une vaste industrie et ce n'est guère sans émotion que l'on songe aux milliers de familles qui tirent l'existence de cette industrie dont le monde vous est redevable. Et puis, sans grand effort de la pensée, revenant aux jours de

mon enfance, j'éprouve encore l'impression pénible, tant de fois ressentie, quand, le soir venu, dans la demeure pauvre ou peu fortunée, s'allumait la mèche fumeuse et répugnante qui jetait des lueurs blafardes : un éclairage digne des temps barbares. Et tout à coup, comme transporté au sein d'une civilisation raffinée, s'offre à mon regard charmé la jolie flamme qui luit dans l'humble habitation, pareille à celle qui doit illuminer les salons les plus somptueux. Du changement, c'est à vous qu'il faut rendre grâce.

» L'investigateur, tout à sa mission, ne rêve que d'élargir son domaine. S'il est parvenu à dévoiler des faits d'un intérêt considérable, il a mérité de la Science. Que de ses travaux surgisse une application capable de fournir au pays une nouvelle richesse, c'est pour lui une gloire ; mais l'homme de science a trouvé sa plus haute récompense lorsqu'il a réussi à répandre un bien-être parmi la nation et à procurer aux plus déshérités de ce monde un peu du luxe qui semblait ne pouvoir être obtenu qu'avec la richesse. Maître, vous expérimentateur, vous philosophe, vous Monsieur Chevreul, vous avez connu tous ces triomphes. Encore une fois, rien ne devait vous manquer.

» Monsieur Chevreul, par vos récits d'événements lointains dont vous avez été le témoin, vous avez captivé tous ceux qui, par l'âge, pourraient être vos fils et ceux, plus nombreux, qui seraient vos petits-fils. Votre mémoire, toujours dans sa fraîcheur, vous permettra d'instruire encore ceux qui seraient des arrière-petits-neveux. A partir de demain, vous compterez les jours, les semaines, les années de votre nouveau siècle. Que ces années soient nombreuses ! c'est le vœu de vos Confrères, de vos admirateurs. De tous, c'est le vœu le plus cher, que je vous crie de toute la force de mon âme. »

M. CHEVREUL exprime, en quelques paroles émues, ses sentiments de gratitude pour ses Confrères et pour les savants qui se sont réunis à l'Académie.

M. le PRÉSIDENT donne lecture du télégramme suivant, qui lui est adressé par l'Université de Kasan, et qui lui est remis au moment même :

« A l'anniversaire mémorable de M. Michel-Eugène Chevreul, vénérable savant universel, l'Université impériale de Kasan complimente le centenaire sur sa longue et fécondante activité, qui a fait faire un si grand progrès dans le développement des sciences expérimentales et tant contribué à l'état florissant de la science et des arts

techniques contemporains; elle envoie également à ce remarquable patriarche du monde savant un chaleureux souhait de santé, de vigueur et de force.

» *Le Recteur de l'Université impériale de Kasan,*

» KREMLOW. »

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur un cas remarquable du problème des perturbations.* Note de M. F. TISSERAND.

« Soient P et P' deux planètes circulant autour du Soleil S, ou bien deux satellites circulant autour de leur planète, dans des orbites peu inclinées l'une sur l'autre.

» Nous désignerons par m et m' ; a et a' , $a < a'$; n et n' ; r et r' ; φ et φ' ; l et l' les masses, les demi grands axes, les moyens mouvements, les rayons vecteurs, les longitudes vraies et les longitudes moyennes de P et P'; la masse de S est prise pour unité.

» I. Nous aurons, en ne considérant que les inégalités indépendantes des excentricités,

$$(1) \quad \begin{cases} r = a \left[1 + m' \sum_1^{\infty} E_i \cos i(l - l') \right], \\ \varphi = l - m' \sum_1^{\infty} C_i \sin i(l - l'); \end{cases}$$

$$(1') \quad \begin{cases} r' = a' \left[1 + m \sum_1^{\infty} E'_i \cos i(l - l') \right], \\ \varphi' = l' + m \sum_1^{\infty} C'_i \sin i(l - l'). \end{cases}$$

» Les coefficients E'_i et C'_i ont les expressions suivantes, qui se déduisent aisément des formules de Laplace (*Mécanique céleste*, Livre II, n° 50),

$$E'_i = \frac{n'^2}{n'^2 - i^2(n - n')^2} \left(a'^2 \frac{dB^{(i)}}{da'} - \frac{2n'}{n - n'} a' B^{(i)} \right),$$

$$C'_i = -2 \frac{n - n'}{n'} i E'_i - \frac{n'}{n - n'} \frac{1}{i} \left(2a'^2 \frac{dB^{(i)}}{da'} - \frac{3n'}{n - n'} a' B^{(i)} \right);$$

ces mêmes formules donneront les coefficients E_i et C_i , en y remplaçant m, a', n, n' par m', a, n', n .

» Les quantités $B^{(i)}$, qui sont des fonctions symétriques de a et a' , sont définies par l'équation

$$(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \lambda)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} B^{(0)} + \sum_1^{\infty} B^{(i)} \cos i \lambda.$$

» En faisant

$$\alpha = \frac{a}{a'}, \quad (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \lambda)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} b^{(0)} + \sum_1^{\infty} b^{(i)} \cos i \lambda, \quad b_1^{(i)} = \alpha \frac{db^{(i)}}{d\alpha},$$

on peut écrire

$$(2) \quad \begin{cases} E_i = - \frac{n'^2}{n'^2 - i^2(n - n')^2} \left(b_1^{(i)} + \frac{n + n'}{n - n'} b^{(i)} \right), \\ C_i = - 2 \frac{n - n'}{n'} i E_i + \frac{2n'}{n - n'} \frac{1}{i} \left(b_1^{(i)} + \frac{n + \frac{1}{2}n'}{n - n'} b^{(i)} \right); \end{cases}$$

il convient toutefois de remarquer que, si l'on veut que ces formules aient lieu aussi pour $i=1$, on doit y remplacer $b^{(1)}$ par $b^{(1)} - \frac{1}{\alpha^2}$, et $b_1^{(1)}$ par $b_1^{(1)} + \frac{2}{\alpha^2}$.

» II. Supposons actuellement que les moyens mouvements n et n' offrent un rapport de commensurabilité très approchée, représenté par une fraction irréductible de la forme $\frac{j+1}{j}$, j étant un entier positif. On aura donc, en désignant par σ un nombre très petit,

$$(3) \quad jn - (j+1)n' = \sigma n',$$

d'où

$$(4) \quad j \frac{n - n'}{n'} = 1 + \sigma;$$

on voit que le dénominateur $n'^2 - i^2(n - n')^2$ qui figure dans les formules (2) sera très petit pour $i=j$ et qu'il ne le sera que pour cette valeur de i ; la valeur de E_j sera donc beaucoup plus grande que celles de $E_{j \pm 1}$, $E'_{j \pm 2}$, ..., et il en sera de même de C_j . On pourra réduire les formules (1') à

$$(5) \quad \begin{cases} r' = a' [1 + m E_j \cos j(l - l')], \\ \nu' = l' + m C_j \sin j(l - l'); \end{cases}$$

mais il faut bien remarquer que cette réduction n'a réellement de sens que si σ est une fraction très petite.

» Il y a plus, le petit dénominateur qui rend C'_j sensible ne figure que dans la première partie de l'expression (2) de C'_i ; on peut donc se borner à

$$C'_j = -2 \frac{n-n'}{n'} j E'_j,$$

ce qui donne, en vertu de l'équation (4),

$$C'_j = -2(1 + \sigma) E$$

ou, à fort peu près,

$$C'_j = -2 E'_j.$$

» Si donc on pose

$$m E'_j = e'_0,$$

les formules (5) pourront s'écrire

$$(A') \quad \begin{cases} r' = a' [1 + e'_0 \cos j(l - l')], \\ \varphi' = l' - 2e'_0 \sin j(l - l'). \end{cases}$$

» On vérifiera aisément qu'en négligeant σ^2 devant σ , on a

$$(B') \quad e'_0 = \frac{m}{2\sigma} [b_1^{(j)} + (2j + 1)b^{(j)}].$$

» Cela étant, posons

$$(C') \quad \varpi'_0 = 180^\circ + (j + 1)l' - jl,$$

et les formules (A') deviendront

$$(D') \quad \begin{cases} r' = a' [1 - e'_0 \cos(l' - \varpi'_0)], \\ \varphi' = l' + 2e'_0 \sin(l' - \varpi'_0). \end{cases}$$

» Or ces deux équations représentent, aux petits termes près en $e_0'^2$, $e_0'^3$, ..., un mouvement elliptique képlérien dans lequel l'excentricité serait e'_0 et la longitude du périhélie ϖ'_0 . Les équations (3) et (C') montrent que le périhélie est animé d'un mouvement uniforme très lent dont la vitesse est égale à $-\sigma n'$; ce mouvement est rétrograde si σ est positif, ce que nous supposons.

» De là cette conséquence : alors même que l'*excentricité propre* e' serait nulle, il y aura une excentricité apparente e'_0 dont la valeur fournie par l'équation (B') pourra être très sensible en raison du petit diviseur σ ; autrement dit : *Si le mouvement de P' était primitivement circulaire et uniforme,*

les perturbations causées par la planète P auront pour principal effet de le transformer en un mouvement très voisin d'un mouvement elliptique képlérien, avec une rotation uniforme du grand axe.

» On trouvera de même que le dénominateur $n^2 - i^2(n - n')^2$ qui figure dans les expressions de E_i et de C_i ne devient très petit que pour $i = j + 1$, et l'on obtiendra aisément les formules suivantes

$$(A) \quad \begin{cases} r = a \{ 1 - e_0 \cos[(j+1)(l-l')] \}, \\ \nu = l + 2e_0 \sin[(j+1)(l-l')], \end{cases}$$

$$(B) \quad e_0 = \frac{j+1}{j} \frac{m'}{2\sigma} \alpha [b_1^{(j+1)} + (2j+2)b^{(j+1)}];$$

en faisant

$$(C) \quad \varpi_0 = (j+1)l' - jl,$$

il viendra

$$(D) \quad \begin{cases} r = a [1 - e_0 \cos(l - \varpi_0)], \\ \nu = l + 2e_0 \sin(l - \varpi_0). \end{cases}$$

» On pourra énoncer des conclusions analogues aux précédentes; il y aura une *excentricité apparente* e_0 , déterminée par la formule (B); les longitudes ϖ_0 et ϖ'_0 des *périhélies apparents* différeront constamment de 180° ; cela résulte des formules (C) et (C').

» Remarquons enfin que, quand les deux planètes P et P' seront en conjonction, P sera voisine de son périhélie apparent, et P' de son aphélie apparent; cela tient à ce que, dans les conjonctions, la différence $l - l'$ diffère peu de $2k\pi$, k étant entier; les anomalies moyennes apparentes sont voisines de 0° et de 180° .

» III. On ne peut s'empêcher de rapprocher ces résultats de ceux obtenus par deux astronomes éminents, MM. A. Hall et S. Newcomb, pour le mouvement de l'un des satellites de Saturne, Hypérion, en tant qu'il résulte des perturbations produites par le plus gros satellite, Titan. P correspondra à Titan, et P' à Hypérion; on a, d'après Hall et Bessel,

$$n = 22^\circ, 57700, \quad n' = 16^\circ, 91988, \quad \alpha = \frac{a}{a'} = 0,825;$$

on en conclut

$$3n - 4n' = + 0^\circ, 0515;$$

cette différence est très petite par rapport à n et n' ; c'est l'un des cas les plus approchés de commensurabilité que présente le système solaire. On

rentre dans les conditions supposées plus haut, en faisant $j = 3$, $\sigma = + 0,003043$.

» Tout indique que le rapport $\frac{m'}{m}$ est extrêmement petit; il n'y aura donc pas à considérer les perturbations de Titan, mais seulement celles d'Hypérion.

» On peut expliquer les phénomènes observés, dans leur ensemble et dans une première approximation, en admettant que l'excentricité propre d'Hypérion est nulle ou, du moins, très petite, et ne considérant que l'excentricité apparente.

» Les observations montrent, en effet, qu'on peut admettre, dans une première approximation, que le mouvement d'Hypérion est représenté par un mouvement elliptique képlérien, dans lequel le grand axe est à peu près constant, ainsi que l'excentricité qui est voisine de 0,1; le pèrisaturne rétrograde d'un mouvement uniforme avec une vitesse de 20° par an; enfin, les conjonctions des deux satellites ont lieu dans le voisinage de l'aposaturne d'Hypérion.

» En appliquant au cas actuel les résultats généraux que nous avons obtenus, on voit que le *pèrisaturne apparent* aura un mouvement rétrograde uniforme de $0^\circ,0515 \times 365,25 = 18^\circ,8$ par an, ce qui diffère peu du nombre observé 20° .

» Pour rendre compte de l'excentricité observée, il suffira de déterminer m par l'équation (B'), en y faisant $e'_0 = 0,1$. On trouve aisément

$$b^{(3)} = 0,562, \quad b_1^{(3)} = 2,610,$$

et il vient

$$0,1 = \frac{m}{2\sigma} \times 6,544, \quad m = \frac{1}{10750};$$

cette valeur diffère peu de celle obtenue par M. Newcomb.

» Les formules (1') et (2) donnent, avec cette valeur de m ,

$$\begin{aligned} \frac{r'}{a'} &= 1 - 0,0004 \cos(l - l') - 0,0014 \cos 2(l - l') \\ &\quad + 0,1000 \cos 3(l - l') + 0,0006 \cos 4(l - l') + \dots, \\ v' &= l' + 10' \sin(l - l') + 13' \sin 2(l - l') \\ &\quad - 11^\circ 23' \sin 3(l - l') - 3' \sin 4(l - l') - \dots \end{aligned}$$

On voit que ces formules ne diffèrent que par de petits termes correctifs des suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{r'}{a'} &= 1 + 0,1000 \cos 3(l - l'), \\ v' &= l' - 11^\circ 23' \sin 3(l - l'). \end{aligned}$$

» Il y aura lieu de comparer la théorie aux observations, et de déterminer les valeurs les plus précises des quantités a' , n' , m , ϵ' (longitude moyenne de l'époque); on procédera ensuite à une seconde approximation, en tenant compte des termes multipliés par e , et introduisant l'excentricité propre e' et la longitude ϖ' correspondante du péricasurne; on déterminera ces deux nouvelles inconnues e' et ϖ' .

» IV. Nous allons faire une autre application en prenant pour S le Soleil, pour P la planète (153) Hilda, et pour P' Jupiter; ce sont les formules (A), (B), (C) qui vont nous servir.

» L'Annuaire du Bureau des Longitudes de 1886 nous donne

$$n = 451'', 5802, \quad n' = 299'', 1284, \quad a = 3,952281, \quad a' = 5,202800;$$

d'où

$$2n - 3n' = + 5'', 7752, \quad \sigma = 0,019308.$$

On a donc ici

$$j = 2;$$

on trouve aisément

$$b^{(3)} = 0,393, \quad b_1^{(3)} = 1,608;$$

la commensurabilité est ici beaucoup moins approchée que pour Hypérion et Titan.

» En prenant $m' = \frac{1}{1050}$, la formule (B) donne

$$e_0 = 0,111.$$

» L'excentricité apparente est donc tout à fait comparable à l'excentricité propre $e = 0,172$, et, si l'on ne tenait compte que de cette dernière, en la prenant comme point de départ pour le calcul des perturbations, on serait très loin de la réalité. On doit donc, pour employer le langage de M. Gylden, employer, dès la première approximation, une *orbite intermédiaire*, qui se trouve être encore à peu près une ellipse.

» Il y a une certaine analogie entre ces résultats et ceux de M. Harzer (*Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft*, t. XX, p. 248); le travail de M. Harzer se rapporte aux petites planètes dont le moyen mouvement est voisin du double de celui de Jupiter. Il va sans dire que notre calcul de e_0 n'est qu'approché; car la valeur moyenne de n peut différer assez notablement de celle que nous avons employée. »

CHIMIE. — *Sur le poids atomique du germanium.* Note de M. Lecoq
DE BOISBAUDRAN.

« J'ai eu dernièrement l'honneur ⁽¹⁾ d'annoncer à l'Académie que M. Winkler, dans un premier essai analytique, avait trouvé 72,75 pour le poids atomique provisoire du germanium. J'étais arrivé aux nombres théoriques suivants :

1° Par mon ancienne classification.....	72,28
2° Par les λ (2 raies du Ge).....	72,32
3° Par les λ (1 raie du Ge).....	72,27

» M. Winkler ⁽²⁾ vient de reprendre la détermination du poids atomique de son curieux métal, en dosant le chlore contenu dans le composé Ge Cl_4 , et il a obtenu

	72,31
	72,41
	72,27
	72,29
Moyenne.....	72,32 ⁽³⁾

» Vu les incertitudes (inévitables, quelque faibles qu'on les suppose) des poids atomiques et des longueurs d'onde connus, qui ont servi à établir mes calculs, il est permis de considérer ceux-ci comme rigoureusement vérifiés.

» La loi de proportionnalité entre les variations des poids atomiques et les variations des longueurs d'onde (loi déjà appliquée au gallium) reçoit aujourd'hui une importante confirmation, en même temps qu'il devient

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, p. 1291, 7 juin 1886.

⁽²⁾ *Journal für praktische Chemie*, Band XXXIV, 1886.

⁽³⁾ Si l'on élimine le nombre 72,41, qui s'éloigne légèrement des autres, il reste

72,31
72,27
72,29

d'où 72,29, moyenne des nombres les plus concordants.

très probable qu'aucune erreur bien sensible n'existe sur les poids atomiques de césium, rubidium, potassium, indium, gallium, aluminium, étain et silicium. En effet, les longueurs d'onde et les poids atomiques de Cs, Rb, K, In et Al ont servi à calculer spectralement le poids atomique du gallium (vérifié depuis analytiquement) et les λ et PA de In, Ga, Al, Sn et Si ont permis de chercher spectralement le poids atomique du germanium, lequel poids est actuellement connu avec une erreur probable qui semble devoir être considérée comme très faible, grâce aux récents travaux de M. le professeur Winkler. »

M. ALBERT GAUDRY présente à l'Académie une Note « Sur un Reptile du terrain permien », et s'exprime en ces termes :

« J'ai l'honneur d'offrir à l'Académie une Note sur un nouveau genre de Reptile qui a été trouvé dans le permien des Télots, près d'Autun, par M. Bayle, directeur de la Société lyonnaise des schistes bitumineux. Pendant longtemps, on n'a pas connu de fossiles plus élevés que les poissons dans les terrains primaires de notre pays. Mais, depuis quelques années, les schistes permien des environs d'Autun, qui sont exploités pour leur pétrole, ont fourni de nombreux Reptiles. J'ai ainsi pu décrire successivement l'Actinodon, le Protriton, le Pleuronoura, l'Euchirosaurus, le Stercorachis. M. Bayle vient de trouver encore un nouveau genre fossile qui diffère très visiblement de ceux que je viens de nommer : on s'en rendra compte facilement en examinant la figure que je présente à l'Académie. Je propose de l'inscrire sous le nom d'*Haptodus Baylei* (ἅπτω, j'attache fortement, ἔδους, dent) parce que les dents adhèrent si fortement aux mâchoires, qu'au premier abord on pourrait croire qu'elles n'en sont pas distinctes.

» C'est une chose singulière de trouver des formes si variées de Reptiles dans le permien d'un même pays, car les genres qu'on rencontre à Autun se séparent en quatre types très distincts : le type Actinodon, le type Protriton, le type Stercorachis, le type Haptodus. Les beaux travaux de M. Fritsch sur la Bohême et de M. Cope sur le Texas ont également révélé une grande diversité dans les Quadrupèdes permien des contrées. Lorsque j'ai présenté à l'Académie le Stercorachis, j'exprimais l'opinion qu'une créature aussi avancée dans son développement porte à penser que l'âge permien est très loin de l'époque qui a vu l'état initial des Qua-

drupèdes. Je me confirme dans cette opinion en remarquant la diversité des formes des Reptiles du permien; il faut s'attendre à rencontrer des traces de Reptiles dans des couches plus anciennes que celles où l'on en a trouvé jusqu'à ce jour.

» Les nombreuses découvertes qui se succèdent dans les gisements de schistes bitumineux d'Autun prouvent l'esprit investigateur des exploitants. Le zèle des amis de la Science dans le département de Saône-et-Loire ne semble pas près de diminuer; car on vient de fonder à Autun une société d'Histoire naturelle qui, dit-on, a réuni immédiatement deux cents adhésions. Ce nombre est d'autant plus remarquable, que déjà dans le département de Saône-et-Loire il y a une société d'Histoire naturelle, dirigée par M. de Montessus, qui a un grand succès. Comme ces choses font honneur à la Science française, je pense qu'elles ne peuvent manquer d'intéresser l'Académie. »

MÉMOIRES LUS.

PHYSIQUE. — *La phosphorographie appliquée à la photographie de l'invisible.*

Note de M. CH.-V. ZENGER.

« En observant le mont Blanc après le coucher du soleil, au commencement de septembre 1883, j'avais été frappé de ce fait, que la lueur bleu-verdâtre pouvait rester perceptible jusqu'à 10^h30^m; j'ai été conduit à penser que la glace de la cime, mêlée aux débris du carbonate de chaux, émet une lumière d'une couleur très semblable à celle des eaux du lac Léman, et qu'il serait possible de fixer l'image de la montagne, à la nuit, par la lumière phosphorescente de la glace, qui se trouve être très active.

» A mon retour, j'ai fait une expérience consistant à projeter les images données par les lentilles photographiques dans la chambre noire sur une plaque de verre couverte d'une couche de phosphore de Balmain, uniformément répandue sur la plaque, comme lorsqu'il s'agit de recouvrir une plaque de verre avec du collodion. Après une exposition de quelques secondes, j'ai pris la plaque de la chambre noire, à l'obscurité, pour la mettre en contact avec une plaque sèche photographique pas trop sensible. Après une heure de contact à l'obscurité, j'ai vu apparaître l'image de l'objet, comme s'il s'agissait d'une prise ordinaire, avec tous les détails.

» Mais l'observation faite à Genève m'a fait penser que le carbonate de chaux, illuminé par un soleil brillant pendant le jour, pourrait émettre des rayons invisibles, mais très actiniques. J'ai fait l'expérience pendant la nuit du 17 mai de l'année suivante 1884, le ciel étant couvert. L'exposition de la plaque, à minuit, sur la terrasse de l'observatoire astrophysique de Prague, pendant quinze minutes, a donné des images assez bonnes des tours et des édifices environnants, après un contact de la plaque phosphorescente avec la plaque photographique prolongé jusqu'au matin du jour suivant. Il y a donc des radiations émises par des corps insolés, radiations assez actiniques, même jusqu'à minuit, en absence de toute autre lumière.

» J'ai répété ces expériences plus tard, avec du papier imprimé, que j'ai placé pendant la journée en plein soleil. Après une heure d'insolation, j'ai opéré le contact avec du papier photographique ordinaire, à la chambre noire. L'impression du papier s'est opérée en peu d'heures, en sorte qu'on n'a pas besoin de développer l'image, mais seulement de la fixer. Les lettres apparaissent nettement en noir, et j'ai fait usage de cette méthode pour copier des notes imprimées.

» Cette expérience m'a conduit enfin à supposer que la lumière peut être absorbée et rendue ensuite lentement, et qu'on peut fixer les images des corps invisibles à l'obscurité, par le simple contact ou par l'appareil photographique.

» Ne se peut-il pas qu'il existe nombre de corps célestes qui, étant illuminés pendant des périodes plus ou moins longues, rendent ensuite lentement cette lumière quand ils sont noyés dans les ténèbres, mais comme lumière actinique, comme les murs illuminés pendant le jour rendent pendant la nuit la lumière absorbée.

» La confection des cartes célestes pourrait en tirer avantage; car, avec un télescope de 8 pouces d'ouverture et 41 pouces de foyer, peu de secondes suffisent pour imprimer la plaque phosphorescente et pour représenter les étoiles jusqu'à la 9^e grandeur, quand on produit à l'obscurité le contact de la plaque phosphorescente ainsi imprimée avec une plaque au gélatinobromure d'argent.

» Tout récemment, j'ai eu l'idée de faire des expériences avec des corps fluorescents et sensibles à la lumière actinique, comme les uranates et les nitrates d'urane. En imbibant du papier anglais, de texture très égale, avec une solution de 10 pour 100 du nitrate d'urane, et en produisant le contact direct avec un dessin, un papier imprimé, etc., préalablement

insolé, ou en produisant à la chambre noire l'image donnée par la lentille photographique sur le papier préparé et collé à une plaque de verre, j'ai toujours obtenu des images latentes, qui peuvent être développées après des mois, à la condition qu'on les tienne pendant ce temps à l'obscurité et dans l'air tout à fait sec.

» On peut ainsi obtenir des images de nombre de corps, dans l'obscurité, quand ils jouissent, comme le carbonate de chaux, le papier, etc., de la propriété de rendre lentement la lumière absorbée pendant l'insolation. On peut reproduire des objets qui, jusqu'ici, sont demeurés tout à fait invisibles à l'œil, en faisant des expositions prolongées avec des lentilles ou miroirs à très court foyer, sur des plaques enduites de substances phosphorescentes ou fluorescentes ; en opérant à l'obscurité et pendant un temps suffisant, avec une plaque plus ou moins sensible à l'émulsion d'argentobromure de collodion ou de gélatine.

» J'ai trouvé qu'il est avantageux de colorer ces plaques avec de la chlorophylle. Au collodion, on ajoute une solution éthérée et concentrée de chlorophylle ; tandis que, pour les plaques à gélatine, on fait usage d'une solution alcaline de chlorophylle. Les plaques ainsi préparées, isochromatiques et d'un vert grisâtre, sont sensibles pour toutes les radiations du spectre solaire, de l'ultra-rouge à l'ultra-violet. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

M. GUSTAVE HERMITE adresse une suite à sa Communication précédente, sur l'emploi de la lumière intermittente pour la mesure des mouvements rapides.

(Commissaires : MM. Fizeau, Cornu, Mascart.)

CORRESPONDANCE.

ASTRONOMIE. — *Observation de la comète Winnecke, faite à l'observatoire d'Alger, au télescope de 0^m,50.* Note de M. CH. TRÉPIED, présentée par M. Mouchez.

« La comète de Winnecke, pour la recherche de laquelle une éphéméride avait été publiée par M. Lamp dans les *Astronomische Nachrichten*, a été

retrouvée le 20 août à l'observatoire du Cap de Bonne-Espérance. L'observation du Cap, communiquée par le service international des télégrammes astronomiques, m'a permis de voir cette comète à Alger, le 22 août. Elle avait l'aspect d'une nébulosité d'environ 1' de diamètre avec un noyau central dont l'éclat pouvait être comparé à celui d'une étoile de grandeur 10 ou 11; mais presque aussitôt les brumes de l'horizon m'ont empêché de déterminer la position de l'astre. Le lendemain 23 août, j'ai pu obtenir la position ci-dessous :

Date 1886.	Étoile de comparaison.	Grandeur.	★ ← — ★		Nombre de compar.
			Asc. droite.	Décl.	
Août 23....	W ₁ 13 ^h 11 ^m 29 ^s .4	8	+ 0 ^m 55 ^s , 58	+ 1' 31'', 8	6 : 6

Position moyenne de l'étoile de comparaison.

Ascension droite moyenne 1886,0.	Réduction au jour.	Déclinaison moyenne 1886,0.	Réduction au jour.	Autorité.
13 ^h 20 ^m 15 ^s , 19	+ 0,88	— 3° 4' 2'', 7	— 0'', 9	$\frac{1}{2}$ (W ₁ + Lamont)

Position apparente de la comète.

Date 1886.	Temps moyen d'Alger.	Ascension droite apparente.	Log. fact. parall.	Déclinaison apparente.	Log. fact. parall.
Août 23	8 ^h 4 ^m 29 ^s	13 ^h 21 ^m 11 ^s , 65	1,656	— 3° 2' 31'', 8	0,731

» Observation difficile; noyau peu distinct; comète très près de l'horizon. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur quelques équations différentielles non linéaires.* Note de M. ROGER LIOUVILLE.

« L'équation différentielle

$$(1) \quad y'' + y'^2 \frac{\partial \log \beta}{\partial y} - y' \frac{\partial \log \alpha}{\partial x} = 0$$

peut toujours être intégrée, si les fonctions α, β , qu'elle renferme, vérifient ce système d'équations aux dérivées partielles

$$(2) \quad 3\alpha + \frac{\partial^2 \log}{\partial x \partial y}(\alpha^2 \beta) = 0, \quad 3\beta + \frac{\partial^2 \log}{\partial x \partial y}(\alpha \beta^2) = 0,$$

dont je vais d'abord donner la solution générale; voici comment on peut la former.

» Soient

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3$$

des fonctions arbitraires de x ;

$$X'_1, \quad X'_2, \quad X'_3$$

leurs dérivées. Soient, de même,

$$Y_1, \quad Y_2, \quad \dots$$

des fonctions de y , et posons

$$\begin{aligned} X_2 X'_3 - X_3 X'_2 &= L_1, & X_3 X'_1 - X_1 X'_3 &= L_2, \\ Y_2 Y'_3 - Y_3 Y'_2 &= M_1, & \dots & \end{aligned}$$

les expressions d' α et β sont les suivantes

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\partial^2 \log}{\partial x \partial y} (X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3), \\ \beta = \frac{\partial^2 \log}{\partial x \partial y} (L_1 M_1 + L_2 M_2 + L_3 M_3), \end{cases}$$

il est facile de s'en assurer. Désignant, en effet, par D_x le déterminant

$$\Sigma \pm X_1 X'_2 X''_3,$$

par D_y son analogue

$$\Sigma \pm Y_1 Y'_2 Y''_3,$$

et, pour abrégé, par (XY) , (LM) , respectivement, les quantités

$$(X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3), \quad (L_1 M_1 + \dots),$$

les formules (3) peuvent être écrites

$$(4) \quad \alpha = \frac{(LM)}{(XY)^2}, \quad \beta = D_x D_y \frac{(XY)}{(LM)^2},$$

d'où résulte

$$\alpha^2 \beta = \frac{D_x D_y}{(XY)^3}, \quad \alpha \beta^2 = \frac{D_x^2 D_y^2}{(LM)^3};$$

celles-ci, jointes à (3), rendent identiques les relations (2).

» Soit maintenant donnée une équation différentielle

$$(5) \quad y'' + 3ay'^2 + 3by' = 0,$$

où a et b sont des fonctions de x et y . Si elle appartient à la catégorie précédemment définie, les deux formules

$$(6) \quad \frac{2 \partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{2 \partial a}{\partial x} = \beta,$$

avec le système (2), en donnent une preuve immédiate.

» Cette constatation faite, l'intégration se fait comme il suit : je calcule une fonction P,

$$(7) \quad 3P = \frac{\partial^2 \log(\alpha\beta)}{\partial x^2} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\partial \log \alpha}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \log \alpha}{\partial x} \frac{\partial \log \beta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \log \beta}{\partial x} \right)^2 \right],$$

qui toujours est indépendante de y , en vertu des équations (2), puis une autre fonction Q, à l'aide de l'équation suivante

$$(8) \quad \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} + 3P \frac{\partial H}{\partial x} + (3P' - Q)H = 0,$$

où je prends $H = (\alpha\beta^2)^{-\frac{1}{3}}$, et il arrive encore que la variable y ne peut entrer dans Q, d'après les équations (2).

» Cela étant, je cherche les solutions de l'équation (8), considérée comme déterminant H. L'une d'elles est, on l'a vu,

$$(9) \quad (\alpha\beta^2)^{-\frac{1}{3}} = D_x^{-\frac{2}{3}} D_y^{-\frac{2}{3}} (LM);$$

y n'y figurant que comme un paramètre, ses dérivées partielles relatives à cette variable sont aussi des solutions de (8); or le groupe suivant

$$L_1 D_x^{-\frac{2}{3}}, \quad L_2 D_x^{-\frac{2}{3}}, \quad L_3 D_x^{-\frac{2}{3}}$$

s'en déduit, et l'intégrale générale de l'équation proposée (1) s'exprime alors de cette manière

$$(10) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_x^{-\frac{2}{3}} \frac{(C_1 L_1 + C_2 L_2 + C_3 L_3)}{(\alpha\beta^2)^{-\frac{1}{3}}} \right];$$

C_1, C_2, C_3 sont des constantes arbitraires.

» Au reste, il n'est pas même nécessaire de procéder à la formation effective de l'équation (8) : je m'en suis servi pour établir la formule (10), mais le calcul de ses intégrales

$$(11) \quad \dots \dots \dots LD_x^{-\frac{2}{3}}$$

se fait, comme on l'a vu, sans utiliser les expressions de P et Q; il suffit de savoir qu'elles ne renferment pas y .

» Soit, par exemple, à intégrer l'équation

$$(12) \quad \frac{d \log \left[\frac{y^2 y'}{x^2} \right]}{dx} + \frac{6(x^2 - y^2 y')}{x^3 + y^3} = 0;$$

on s'assure d'abord qu'elle appartient à la catégorie dont il s'agit; les fonctions α et β sont ici égales entre elles et l'on a

$$\alpha = \frac{-6x^2 y^2}{(x^3 + y^3)^2},$$

ce qui satisfait bien au système (2). Les fonctions telles que (11) sont, pour ce cas,

$$x^4, \quad x \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2};$$

j'en déduis cette intégrale de (12)

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{C_1 x^4 + C_2 x + C_3 x^{-2}}{x^4 y^{-2} + 2xy + y^4 x^{-2}} \right]$$

et, suppression faite d'un facteur commun à tous les termes dans le résultat développé, je trouve

$$C_1 x^3 y^3 + C_2 (y^3 - x^3) + C_3 = 0;$$

la vérification est des plus simples.

» Les propositions énoncées dans la présente Note se rattachent à une théorie beaucoup plus générale, qui fera, si l'Académie veut bien le permettre, l'objet d'une autre Communication. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les intégrales algébriques des problèmes de la Dynamique.* Note de M. G. Kœnigs, présentée par M. Darboux.

« MM. Bertrand, Massieu, Bour, O. Bonnet, M. Lévy se sont occupés des intégrales algébriques des problèmes de la Dynamique; ces recherches portent principalement sur le cas des lignes géodésiques, et elles supposent toutes que l'intégrale algébrique considérée : 1° est algébrique *par rapport aux composantes des vitesses*; 2° qu'elle est même non seulement algébrique, mais encore *rationnelle* par rapport à ces vitesses.

» Le cas général peut paraître, au premier abord, beaucoup plus compliqué. Je me propose de montrer ici comment le cas d'une intégrale algébrique irrationnelle rentre *toujours* et *nécessairement* dans le cas de la rationalité : 1° même lorsque l'intégrale des forces vives n'a pas lieu; 2° même si l'intégrale est algébrique par rapport à quelques-unes des composantes des vitesses seulement, ou par rapport à quelques-unes des coordonnées, et cela *sous une condition extrêmement simple et générale* imposée à l'équation aux dérivées partielles de Jacobi.

» Si l'intégrale des forces vives existe et qu'on la représente par

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n),$$

on sait que l'équation

$$(A) \quad (f, \Phi) = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que

$$\Phi(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$$

soit une intégrale.

» Si, au contraire, l'intégrale des forces vives n'existe pas, il existe du moins une fonction $f(t, q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$ qui contient le temps, et telle que l'équation

$$(B) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (f, \Phi) = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que

$$\Phi(t, q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n),$$

qui contient généralement le temps, soit une intégrale. Je laisse de côté tous les problèmes de Mécanique auxquels la méthode de Jacobi ne serait pas applicable.

» Je conviens de représenter généralement par $\theta(\Phi) = 0$ la condition pour que Φ soit une intégrale; $\theta(\Phi) = 0$ sera (A) dans un cas, et (B) dans l'autre. On peut ainsi les comprendre tous les deux dans un même raisonnement.

» Cela posé, je suppose que la fonction f , de l'un ou l'autre cas, dépende rationnellement de l'une des quantités $q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n$, quantité que je représenterai par ω ; j'énonce alors le théorème suivant :

» S'il existe une intégrale Φ algébrique et irrationnelle par rapport à ω , on

pourra toujours exprimer Φ à l'aide d'un nombre limité d'intégrales non seulement algébriques, MAIS ENCORE RATIONNELLES par rapport à ω .

» Soit, en effet,

$$(1) \quad U = F_m \Phi^m + F_{m-1} \Phi^{m-1} + \dots + F_1 \Phi + F_0 = 0$$

l'équation algébrique qui définit Φ , et où les F_i sont des polynômes entiers en ω , dont les coefficients dépendent d'une façon quelconque des autres quantités q et p . On peut toujours supposer U irréductible, c'est-à-dire non divisible par un polynôme entier en Φ , dont les coefficients soient rationnels en ω .

» Puisque l'on a identiquement $U = 0$, on a aussi

$$\theta(U) = 0$$

ou, en développant,

$$0 = \frac{\partial U}{\partial \Phi} \theta(\Phi) + \theta(F_m) \Phi^m + \theta(F_{m-1}) \Phi^{m-1} + \dots + \theta(F_1) \Phi + \theta(F_0) = 0.$$

Cela permet de mettre l'équation $\theta(\Phi) = 0$ sous la forme

$$(2) \quad \theta(F_m) \Phi^m + \theta(F_{m-1}) \Phi^{m-1} + \dots + \theta(F_1) \Phi + \theta(F_0) = 0.$$

Les coefficients de (2) sont rationnels en ω , et, pour toute valeur de ω , les équations (1) et (2) ont une racine commune; l'irréductibilité de U exige alors que toutes les racines de (1) appartiennent à (2) ou, à cause de l'égalité des degrés, que les coefficients de (1) et (2) soient proportionnels; on trouve ainsi

$$(3) \quad \frac{\theta(F_m)}{F_m} = \frac{\theta(F_{m-1})}{F_{m-1}} = \dots = \frac{\theta(F_1)}{F_1} = \frac{\theta(F_0)}{F_0}.$$

Comme on a identiquement

$$\theta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\theta(u) - u\theta(v)}{v^2},$$

on déduit des équations (3) que les rapports

$$\alpha_0 = \frac{F_0}{F_m}, \quad \alpha_1 = \frac{F_1}{F_m}, \quad \dots, \quad \alpha_{m-1} = \frac{F_{m-1}}{F_m}$$

vérifient l'équation

$$\theta(\alpha) = 0$$

et sont m intégrales (*rationnelles en ω*) du problème de Dynamique. L'intégrale Φ s'exprime au moyen de ces intégrales par l'équation

$$\Phi^m + \alpha_{m-1} \Phi^{m-1} + \dots + \alpha_1 \Phi + \alpha_0 = 0.$$

» On doit ajouter les remarques suivantes :

» 1^o Si Φ est une intégrale et ne se réduit pas à une constante numérique, il faut que l'une au moins des intégrales α soit une intégrale effective, c'est-à-dire ne se réduise pas à une constante numérique ;

» 2^o Si l'intégrale des forces vives existe et que Φ soit distincte de cette intégrale, il faut que l'une au moins des intégrales rationnelles α soit distincte de celle des forces vives, c'est-à-dire ne soit pas une simple fonction de l'intégrale des forces vives.

» Nous n'avons pas besoin de détailler ici toutes les applications de ce théorème général. Considérons seulement le cas si général où l'intégrale des forces vives existe, et où f est une forme quadratique par rapport aux quantités p . On voit tout de suite que, dans l'étude des intégrales algébriques par rapport aux p (ou même à une portion des p), on peut s'en tenir au cas de la rationalité, sans porter la moindre atteinte à la généralité. Seulement, on voit aussi qu'il y a lieu de s'occuper des problèmes de Dynamique qui admettraient non seulement une seconde intégrale algébrique, mais un plus grand nombre.

» Cette question n'existe évidemment pas pour le cas des géodésiques, puisqu'il n'y a pas lieu de chercher plus de deux intégrales distinctes.

» A cause de cela, on peut dire qu'au point de vue algébrique les recherches de Bour et de M. Maurice Lévy sur les géodésiques à intégrales rationnelles offrent toute la généralité voulue. »

M. MARTIN adresse, de Loudun, une Note sur un appareil reproduisant les mouvements des corps célestes.

M. L. HUGO adresse une Note sur les formes géométriques des grêlons tombés à Paris le 23 août.

La séance est levée à 4 heures un quart.

J. B.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

OUVRAGES REÇUS DANS LA SÉANCE DU 30 AOUT 1886.

La pathologie des races humaines et le problème de la colonisation; par J. ORGEAS. Paris, O. Doin, 1886; in-8°. (Présenté par M. le baron Larrey pour le concours Montyon, Médecine et Chirurgie, 1887.)

Discussions et Tables de positions géographiques dans les mers des Indes et de la Chine; par M. CASPARI. Paris, Impr. nationale, 1886; in-8°. (Extrait des *Annales hydrographiques.*) (Présenté par M. Bouquet de la Grye.)

Publications of the Washburn observatory of the University of Wisconsin; vol. IV. Madison, Wisconsin, 1886; in-8° relié.

Report of the Board on behalf of United States executive departments at the international exhibition, held at Philadelphia, Pa., 1876, under acts of Congress of march 3, 1875, and may 1, 1876; in two volumes. Washington, Government printing Office, 1884; 2 vol. in-8° reliés.

Department of the Interior. Bulletin of the United States geological Survey; n^{os} 24, 25, 26. Washington, Government printing Office, 1885; 3 livr. in-8°.

Proceedings of the american Association for the advancement of Science, thirty-third meeting held at Philadelphia, Penn, september 1884. Salem, published by the permanent Secretary, 1885; 2 vol. in-8°.

Second Armagh catalogue of 3300 stars for the epoch 1875, deduced from observations made at the Armagh observatory during the years 1859 to 1883, under the direction of the late T. R. Robinson, and prepared for publication by his successor J.-L.-E. DREYER. Dublin, Alex. Thom, 1886; in-8° relié.

Transactions of the seismological Society of Japan; vol. IX, Part. I et II, 1886. Yokohama, 1886; 2 livr. in-8°.

Introduzione allo studio del Calcolo; per L. BARBERA. Bologna, tipogr. G. Cenerelli, 1881; in-8°.

I Simplicii contemporanei ovvero critica del Calcolo infinitesimale; per L. BARBERA. Bologna, tipogr. G. Cenerelli, 1883; in-8°.

O. COMES. *La cancrena umida del cavolo-fiore* (Brassica oleracea botrytis). — *Sulla malsania manifestatasi nel 1884 nelle viti ed in altre piante del*

Napolitano e sul modo di provvedervi. — Sulla rhizomorpha necatrix di R. Hartig e sulla dominante malattia degli alberi; 3 br. in-8°. (Estratto dall' Annuario della R. Scuola superiore d'Agricoltura in Portici.)

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz; 24 Lieferung. Texte et Atlas. Bern, Schmid, Francke et C°, 1886; in-4°.

Resultados del observatorio nacional argentino en Cordoba bajo la direccion del D^r BENJAMIN-A. GOULD, Juan-M. Thome director, vol. V. Observaciones del año 1874. Buenos-Aires, 1886; in-4°.



